

MAT0148-Introdução ao Trabalho Científico

Localização dinâmica para perturbações de operadores de Schrödinger discretos com campo elétrico

Leonardo Takashi Teramatsu

Artigo lido: de Oliveira C. R., M. Pigossi. Proof of dynamical localization for perturbations of discrete $1D$ Schrödinger operators with uniform electric fields. Mathematische Zeitschrift. Springer Nature (2018).

Orientador: Rodrigo Bissacot

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

Durante o desenvolvimento desse trabalho o autor recebeu auxílio da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo)

FAPESP Processo 2019/26825-2

Novembro 27, 2020

Sumário

- 1 O que é Dinâmica Quântica ?
- 2 Qual o operador de Schrödinger será analisado ?
- 3 Localização dinâmica
- 4 Qual foi o meu foco para esse trabalho ?
- 5 Resultados que foram obtidos:
 - H_0 possui espectro discreto simples dado pelos números inteiros.
 - H_0 tem localização dinâmica.

O que é Dinâmica Quântica ?

A grosso modo:

Análise de uma evolução temporal de algum sistema complexo, tanto linear quanto não-linear.

Evolução Temporal dos estados de um sistema quântico - Equação de Schrödinger

$$i\frac{d\xi}{dt}(t) = H\xi(t), \xi(t) = e^{-itH}\xi \in \mathcal{H}, \xi \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H}$$

$H = H^*$ e $\mathcal{H}$ Hilbert separável

$H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$ Linear

Evolução Temporal dos estados de um sistema quântico - Equação de Schrödinger

$$i\frac{d\xi}{dt}(t) = H\xi(t), \xi(t) = e^{-itH}\xi \in \mathcal{H}, \xi \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H}$$

$H = H^*$ e $\mathcal{H}$ Hilbert separável

$H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$ Linear

Evolução Temporal dos estados de um sistema quântico - Equação de Schrödinger

$$i\frac{d\xi}{dt}(t) = H\xi(t), \xi(t) = e^{-itH}\xi \in \mathcal{H}, \xi \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H}$$

$H = H^*$ e $\mathcal{H}$ Hilbert separável

$H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$ Linear

Dinâmica Quântica

Podemos dizer que é o estudo da evolução temporal de um sistema quântico.

Qual o operador de Schrödinger será analisado ?

Qual o operador que foi estudado ?

$$H_{V,E} : \mathcal{D}(H_{V,E}) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$$\mathcal{D}(H_{V,E}) = \left\{ \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |\psi(n)|^2 < \infty \right\}$$

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi(n)|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) \overline{\varphi(n)}, \forall \psi, \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

Qual o operador que foi estudado ?

$$H_{V,E} : \mathcal{D}(H_{V,E}) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$$\mathcal{D}(H_{V,E}) = \left\{ \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |\psi(n)|^2 < \infty \right\}$$

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi(n)|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) \overline{\varphi(n)}, \forall \psi, \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

Qual o operador que foi estudado ?

$$H_{V,E} : \mathcal{D}(H_{V,E}) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$$\mathcal{D}(H_{V,E}) = \left\{ \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |\psi(n)|^2 < \infty \right\}$$

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi(n)|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) \overline{\varphi(n)}, \forall \psi, \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

Qual o operador que foi estudado ?

$$H_{V,E} : \mathcal{D}(H_{V,E}) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$$\mathcal{D}(H_{V,E}) = \left\{ \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |\psi(n)|^2 < \infty \right\}$$

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi(n)|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) \overline{\varphi(n)}, \forall \psi, \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

Qual o operador que foi estudado ?

$$H_{V,E} : \mathcal{D}(H_{V,E}) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$$\mathcal{D}(H_{V,E}) = \left\{ \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |\psi(n)|^2 < \infty \right\}$$

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi(n)|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) \overline{\varphi(n)}, \forall \psi, \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

Qual o operador que foi estudado ?

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial limitado

$E \neq 0$ é um campo elétrico uniforme.

Δ é o Laplaciano Discreto.

$$(\Delta\psi)(n) = \sum_{|m-n|=1} \psi(m), n \in \mathbb{Z}^d, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$$

$$(\Delta\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) \text{ para } d=1$$

Qual o operador que foi estudado ?

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial limitado

$E \neq 0$ é um campo elétrico uniforme.

Δ é o Laplaciano Discreto.

$$(\Delta\psi)(n) = \sum_{|m-n|=1} \psi(m), n \in \mathbb{Z}^d, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$$

$$(\Delta\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) \text{ para } d=1$$

Qual o operador que foi estudado ?

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial limitado

$E \neq 0$ é um campo elétrico uniforme.

Δ é o Laplaciano Discreto.

$$(\Delta\psi)(n) = \sum_{|m-n|=1} \psi(m), n \in \mathbb{Z}^d, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$$

$$(\Delta\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) \text{ para } d=1$$

Qual o operador que foi estudado ?

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial limitado

$E \neq 0$ é um campo elétrico uniforme.

Δ é o Laplaciano Discreto.

$$(\Delta\psi)(n) = \sum_{|m-n|=1} \psi(m), n \in \mathbb{Z}^d, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$$

$$(\Delta\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) \text{ para } d=1$$

Qual o operador que foi estudado ?

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial limitado

$E \neq 0$ é um campo elétrico uniforme.

Δ é o Laplaciano Discreto.

$$(\Delta\psi)(n) = \sum_{|m-n|=1} \psi(m), n \in \mathbb{Z}^d, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$$

$$(\Delta\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) \text{ para } d=1$$

Qual o operador que foi estudado ?

$$(H_{V,E}\psi)(n) := (\Delta\psi)(n) + En\psi(n) + V(n)\psi(n), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E})$$

$V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial limitado

$E \neq 0$ é um campo elétrico uniforme.

Δ é o Laplaciano Discreto.

$$(\Delta\psi)(n) = \sum_{|m-n|=1} \psi(m), n \in \mathbb{Z}^d, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$$

$$(\Delta\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) \text{ para } d = 1$$

O que foi abordado no trabalho:

$$H_0 = H_{V \equiv 0, E}$$

$$(H_0 \psi)(n) = (\Delta \psi)(n) + En \psi(n)$$

O que foi abordado no trabalho:

$$H_0 = H_{V \equiv 0, E}$$

$$(H_0 \psi)(n) = (\Delta \psi)(n) + En \psi(n)$$

Localização dinâmica

O que é ter localização dinâmica ?

Podemos pensar por um instante como uma forma de possibilitar a localização de uma partícula numa dada região.

Qual a sua formalização ?

Seja H um operador auto-adjunto em $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, $\psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$, $\psi(t) = e^{-itH}\psi$. Para qualquer $p > 0, t \in \mathbb{R}$, defina o momento do operador posição

$$|X|_{\psi}^p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\psi(t, n)|^2 |n|^p$$

Definição

O operador H tem localização dinâmica para ψ , $\|\psi\| = 1$ e para todo $p > 0$, dito momento de ordem p , se

$$\sup_t |X|_{\psi}^p(t) < +\infty$$

Qual a sua formalização ?

Seja H um operador auto-adjunto em $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, $\psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$, $\psi(t) = e^{-itH}\psi$. Para qualquer $p > 0, t \in \mathbb{R}$, defina o momento do operador posição

$$|X|_{\psi}^p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\psi(t, n)|^2 |n|^p$$

Definição

O operador H tem localização dinâmica para ψ , $\|\psi\| = 1$ e para todo $p > 0$, dito momento de ordem p , se

$$\sup_t |X|_{\psi}^p(t) < +\infty$$

Para $H_{V,E}$?

O momento

$$r_{\psi}^p(t) := \langle e^{-itH_{V,E}}\psi, |X|^p e^{-itH_{V,E}}\psi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi(t, n)|^2 |n|^p$$

de ordem $p > 0$, onde X denota o operador posição $(X\psi)(n) := n\psi(n)$ e $(|X|^p\psi)(n) = |n|^p\psi(n)$.

Como $\|\psi\| = 1$, então é suficiente analisarmos para (e_n) a base usual de $\ell^2(\mathbb{Z})$, ou seja, $e_n(m) = \delta_{nm}$ e assim $Xe_n = ne_n$.

Definição

Dizemos que $H_{V,E}$ tem localização dinâmica se para todas condições iniciais e_m , cada momento é uniformemente limitado no tempo, isto é, para cada $p > 0$ e cada $\psi = e_m$,

$$\sup_t r_{\psi}^p(t) < \infty.$$

Para $H_{V,E}$?

O momento

$$r_{\psi}^p(t) := \langle e^{-itH_{V,E}}\psi, |X|^p e^{-itH_{V,E}}\psi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi(t, n)|^2 |n|^p$$

de ordem $p > 0$, onde X denota o operador posição $(X\psi)(n) := n\psi(n)$ e $(|X|^p\psi)(n) = |n|^p\psi(n)$.

Como $\|\psi\| = 1$, então é suficiente analisarmos para (e_n) a base usual de $\ell^2(\mathbb{Z})$, ou seja, $e_n(m) = \delta_{nm}$ e assim $Xe_n = ne_n$.

Definição

Dizemos que $H_{V,E}$ tem localização dinâmica se para todas condições iniciais e_m , cada momento é uniformemente limitado no tempo, isto é, para cada $p > 0$ e cada $\psi = e_m$,

$$\sup_t r_{\psi}^p(t) < \infty.$$

EDL (Exponential Dynamical Localization)

É um caso especial e importante da localização dinâmica. Sejam H um operador auto-adjunto e $\psi \in \mathcal{H}$, $\psi(t) = e^{-itH}\psi$. Devemos dizer que a localização dinâmica exponencial vale para ψ se existe $\gamma > 0, C > 0$ tais que

$$\sup_t |\psi(t, n)| \leq C e^{-\gamma|n|}$$

Claramente *EDL* implica em localização dinâmica.

EDL (Exponential Dynamical Localization)

É um caso especial e importante da localização dinâmica. Sejam H um operador auto-adjunto e $\psi \in \mathcal{H}$, $\psi(t) = e^{-itH}\psi$. Devemos dizer que a localização dinâmica exponencial vale para ψ se existe $\gamma > 0, C > 0$ tais que

$$\sup_t |\psi(t, n)| \leq C e^{-\gamma|n|}$$

Claramente *EDL* implica em localização dinâmica.

Como podemos concluir a ideia do que é uma localização dinâmica ?

É uma propriedade de conseguir localizar primeiro uma partícula numa dada região e, mesmo com a evolução temporal, a mesma partícula não se desloca tão longe da região onde ela foi localizada.

Qual foi o meu foco para esse trabalho ?

Analisar as propriedades espectrais e dinâmicas de H_0 :

$$H_0 = H_{V \equiv 0, E}$$

$$(H_0\psi)(n) = (\Delta\psi)(n) + En\psi(n), n \in \mathbb{Z}, \psi \in \mathcal{D}(H_0)$$

Analisar as propriedades espectrais e dinâmicas de H_0 :

$$H_0 = H_{V \equiv 0, E}$$

$$(H_0\psi)(n) = (\Delta\psi)(n) + En\psi(n), n \in \mathbb{Z}, \psi \in \mathcal{D}(H_0)$$

Como foi feita a análise ?

- Solução estacionária:

$$H_0\psi = \lambda\psi$$

Artigo: E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem (Quantização como um problema de autovalor), Annalen der Physik (1926), 361-376.

- Transformada de Fourier discreta:

$$\hat{\psi}(\varepsilon) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) e^{-2\pi i n \varepsilon}, \forall \varepsilon \in [0, 1), \psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

- SULE (Semi-Uniformly Localized Eigenfunction):

O operador H tem SULE se:

- H tem um conjunto completo e ortonormal de autofunções $\{\varphi_k\}_k$ em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, isto é, $H\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$.
- Existem $\alpha > 0$ e, para cada autofunção φ_k , um $n_k \in \mathbb{Z}$ de forma que, para qualquer $\delta > 0$ existe $C(\delta) > 0$ de modo que

$$|\varphi_k(n)| \leq C(\delta) e^{\delta|n_k| - \alpha|n - n_k|}, \forall n \in \mathbb{Z}^d$$

Como foi feito a análise ?

- Solução estacionária:

$$H_0\psi = \lambda\psi$$

Artigo: E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem (Quantização como um problema de autovalor), Annalen der Physik (1926), 361-376.

- Transformada de Fourier discreta:

$$\widehat{\psi}(\varepsilon) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) e^{-2\pi i n \varepsilon}, \forall \varepsilon \in [0, 1), \psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

- SULE (Semi-Uniformly Localized Eigenfunction):

O operador H tem SULE se:

- H tem um conjunto completo e ortonormal de autofunções $\{\varphi_k\}_k$ em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, isto é, $H\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$.
- Existem $\alpha > 0$ e, para cada autofunção φ_k , um $n_k \in \mathbb{Z}$ de forma que, para qualquer $\delta > 0$ existe $C(\delta) > 0$ de modo que

$$|\varphi_k(n)| \leq C(\delta) e^{\delta|n_k| - \alpha|n - n_k|}, \forall n \in \mathbb{Z}^d$$

Como foi feita a análise ?

- Solução estacionária:

$$H_0\psi = \lambda\psi$$

Artigo: E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem (Quantização como um problema de autovalor), Annalen der Physik (1926), 361-376.

- Transformada de Fourier discreta:

$$\hat{\psi}(\varepsilon) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) e^{-2\pi i n \varepsilon}, \forall \varepsilon \in [0, 1), \psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

- SULE (Semi-Uniformly Localized Eigenfunction):

O operador H tem SULE se:

- H tem um conjunto completo e ortonormal de autofunções $\{\varphi_k\}_k$ em $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, isto é, $H\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$.
- Existem $\alpha > 0$ e, para cada autofunção φ_k , um $n_k \in \mathbb{Z}$ de forma que, para qualquer $\delta > 0$ existe $C(\delta) > 0$ de modo que

$$|\varphi_k(n)| \leq C(\delta) e^{\delta|n_k| - \alpha|n - n_k|}, \forall n \in \mathbb{Z}^d$$

Como foi feito a análise ?

Teorema

Sejam $\{\varphi_k\}$ um conjunto ortonormal completo para o espaço de hilbert $\mathcal{H}$ e $F_0 = \sup_k |\varphi_k(n)\varphi_k(m)|$. Suponhamos que para um $\psi \in \mathcal{H}$ satisfaz

$$|\psi(n)| \leq Ce^{-r|n|}$$

para algum $r > 0$ e algum $C > 0$. Assim, considerando $\psi(t) = e^{-itH}\psi$, então vale a seguinte afirmação:

Suponha que existam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$F_0 \leq Ce^{-\alpha|m-n|+\beta|m|}.$$

Então

$$\sup_t |\psi(t, n)| \leq C(\gamma)e^{-\gamma|n|}, \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ onde } 0 < \gamma < \min \left\{ \alpha, \frac{\alpha r}{\alpha + \beta} \right\}$$

Como foi feito a análise ?

É um teorema de *EDL*.

Tcheremchantsev, S.: How to prove dynamical localization. Commun, Math.Phys. 221, 27-56 (2001).

Por que SULE ?

$SULE \implies EDL \implies$ Tem localização dinâmica.

Resultados que foram obtidos:
 H_0 possui espectro discreto simples dado pelos números
inteiros.

Autofunções que foi obtido:

Teorema

H_0 tem espectro discreto simples dado pelo número inteiro.

$$\varphi_m(n) = \int_0^1 e^{2\pi i n \varepsilon} \hat{\varphi}_m(\varepsilon) d\varepsilon \text{ e } H_0 \varphi_m = m \varphi_m$$

onde

$$\hat{\varphi}_m(\varepsilon) = e^{2i \sin(2\pi \varepsilon)} e^{-2\pi i m \varepsilon}, \forall \varepsilon \in [0, 1)$$

Resultados que foram obtidos:
 H_0 tem localização dinâmica.

Graças à seguinte desigualdade:

Teorema

H_0 tem localização dinâmica.

$$|\varphi_m(n)| \leq \frac{e}{|n-m|!}, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r|n|+1}}{|n|!} = 0$$

$$\frac{e}{|n-m|!} < C(\delta) e^{\delta|m| - \alpha|n-m|}, \forall \delta > 0$$

Graças à seguinte desigualdade:

Teorema

H_0 tem localização dinâmica.

$$|\varphi_m(n)| \leq \frac{e}{|n-m|!}, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r|n|+1}}{|n|!} = 0$$

$$\frac{e}{|n-m|!} < C(\delta) e^{\delta|m| - \alpha|n-m|}, \forall \delta > 0$$

Graças à seguinte desigualdade:

Teorema

H_0 tem localização dinâmica.

$$|\varphi_m(n)| \leq \frac{e}{|n-m|!}, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r|n|+1}}{|n|!} = 0$$

$$\frac{e}{|n-m|!} < C(\delta) e^{\delta|m| - \alpha|n-m|}, \forall \delta > 0$$

Graças à seguinte desigualdade:

Teorema

H_0 tem localização dinâmica.

$$|\varphi_m(n)| \leq \frac{e}{|n-m|!}, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r|n|+1}}{|n|!} = 0$$

$$\frac{e}{|n-m|!} < C(\delta) e^{\delta|m| - \alpha|n-m|}, \forall \delta > 0$$

O que isso significa em ter Localização dinâmica ?

$$\psi(t, n) := (e^{-itH_0}\psi)(n) = \sum_k e^{-it\lambda_k} \varphi_k(n) \overline{\varphi_k(m)}, \psi = e_m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\sup_t r_\psi^p(t) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^p (\sup_t |\psi(t, n)|)^2$$

O que isso significa em ter Localização dinâmica ?

$$\psi(t, n) := (e^{-itH_0}\psi)(n) = \sum_k e^{-it\lambda_k} \varphi_k(n) \overline{\varphi_k(m)}, \psi = e_m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\sup_t r_\psi^p(t) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^p (\sup_t |\psi(t, n)|)^2$$

Qual o ponto chave ?

Ativando o SULE

$$|\varphi_k(n)\varphi_k(m)| \leq C^2(\delta)e^{2\delta|k|-\alpha(|n-k|+|m-k|)}$$

Com as desigualdades

$$|k| \leq |m| + |m - k| \text{ e } |m - n| \leq |n - k| + |m - k|$$

não depende de k

$$\sup_k |\varphi_k(n)\varphi_k(m)| \leq C^2(\delta)e^{2\delta|m|-(\alpha-2\delta)|m-n|}, 0 < 2\delta < \alpha$$

Qual o ponto chave ?

Ativando o SULE

$$|\varphi_k(n)\varphi_k(m)| \leq C^2(\delta)e^{2\delta|k|-\alpha(|n-k|+|m-k|)}$$

Com as desigualdades

$$|k| \leq |m| + |m - k| \text{ e } |m - n| \leq |n - k| + |m - k|$$

não depende de k

$$\sup_k |\varphi_k(n)\varphi_k(m)| \leq C^2(\delta)e^{2\delta|m|-(\alpha-2\delta)|m-n|}, 0 < 2\delta < \alpha$$

Qual o ponto Chave ?

Pelo teorema do *EDL* temos

$$\sup_t |\psi(t, n)| \leq C(\gamma) e^{-\gamma|n|}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\sup_t r_\psi^p(t) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^p (\sup_t |\psi(t, n)|)^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^p C(\gamma)^2 e^{-2\gamma|n|} < \infty$$

Qual o ponto Chave ?

Pelo teorema do *EDL* temos

$$\sup_t |\psi(t, n)| \leq C(\gamma) e^{-\gamma|n|}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\sup_t r_\psi^p(t) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^p (\sup_t |\psi(t, n)|)^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^p C(\gamma)^2 e^{-2\gamma|n|} < \infty$$

Próximo passo:

Se variarmos agora o E ?

$$E(n) = \frac{1}{|n|^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(H_0\psi)(n) = (\Delta\psi)(n) + E(n)n\psi(n), \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E}), n \in \mathbb{Z}$$

- Para $\alpha \geq 1$. Ok!!
- E para $0 < \alpha < 1$?

Próximo passo:

Se variarmos agora o E ?

$$E(n) = \frac{1}{|n|^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(H_0\psi)(n) = (\Delta\psi)(n) + E(n)n\psi(n), \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E}), n \in \mathbb{Z}$$

- Para $\alpha \geq 1$. Ok!!
- E para $0 < \alpha < 1$?

Próximo passo:

Se variarmos agora o E ?

$$E(n) = \frac{1}{|n|^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(H_0\psi)(n) = (\Delta\psi)(n) + E(n)n\psi(n), \psi \in \mathcal{D}(H_{V,E}), n \in \mathbb{Z}$$

- Para $\alpha \geq 1$. Ok!!
- E para $0 < \alpha < 1$?

Agradecimentos

Ao Rodrigo Bissacot e o seu grupo de pesquisa ! Aos coordenadores do MAT0148 !

Referências



[M. Pigossi(2019)]M. Pigossi. Localização Dinâmica para partuações de operadores de Schrödinger discretos com campo elétrico. Universidade Federal de São Carlos (2018).



[de Oliveira (2009)]de Oliveira, C. R.: Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics. PMP v. 54 (Basel: Birkhäuser, 2009)



[de Oliveira (2018)] de Oliveira C. R., M. Pigossi. Proof of dynamical localization for pertubations of discrete $1D$ Schrödinger operators with uniform electric fields. Mathematische Zeitschrift. Springer Nature (2018).



[R. Carmona(1990)]R. Carmona, J. Lacroix. Spectral Theory of Random Schrödinger Operators. Birkhäuser Boston, 1990.



[Tcheremchantsev. S(2001)]Tcheremchantsev, S.: How to prove dynamical localization. Commun, Math.Phys. 221, 27-56 (2001).

Fim !